

Dans cette séance on va voir

(i) la droite de régression

→ application de la méthode
des moindres carrés !

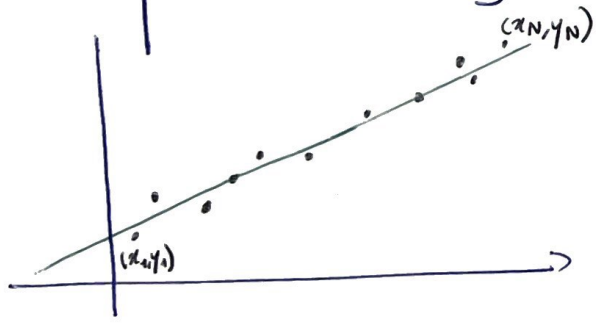
(ii) la diagonalisation de
matrices symétriques

Application de méthode des moindres carrés

Imaginons que l'on a une collection de points

$$P = \{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)\} \in \mathbb{R}^2$$

et l'on veut trouver la "meilleure droite" qui approxime le
mieux ces points dans P : $|\alpha x + \beta = y| (*)$



Idee: on veut $\hat{\alpha}, \hat{\beta} \in \mathbb{R}$

tel s que les différences dans le tableau:

Valeur prédite par (*)	Valeur réelle
$\hat{\alpha} x_1 + \hat{\beta}$	y_1
$\vdots$	$\vdots$
$\hat{\alpha} x_N + \hat{\beta}$	y_N

soient minimales ! !

On veut donc $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ tels que

$$E^2 = (\hat{\alpha} x_1 + \hat{\beta} - y_1)^2 + \dots + (\hat{\alpha} x_N + \hat{\beta} - y_N)^2$$

soit le plus petit possible (par $P = \{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)\}$ fixes)

$$O_r \quad \varepsilon^2 = \left\| \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \right\|^2$$

"erreur d'approximation quadratique"

i.e. on veut trouver $\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix}$ tel que

$$\varepsilon = \left\| \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \right\| \text{ soit le plus petit possible}$$

"erreur d'approximation"

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \text{ est une sol. de } \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \text{ au sens des MC}$$

▽
○

Conclusion (Définition aussi)

$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ droite de régression de $\mathcal{P} = \{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)\}$

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \text{ sol. de SEL } \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \text{ au sens des MC}$$

Exemple/Exercice

Calculer la droite de régression de la famille de points $\mathcal{P} = \{(0, 6), (1, 0), (2, 0)\}$.

Comme la droite de régression $\hat{\alpha}x + \hat{\beta} = y$ est la sol. de 72

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

au sens des MC, on va calculer la solution. Dans ce cas, on va le faire avec l'EN: $A^T A \cdot \vec{x} = A^T \vec{b}$.

On trouve

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{y = -3x + 5}$$

Exercice Calculer la droite de régression de

$$S = \{(-6, -1), (-2, 2), (1, 1), (7, 6)\}$$

Dans ce cas, il faut résoudre le SEL au sens des MC. Avec l'EN on trouve

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$\begin{pmatrix} 90 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A^T A \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2} \cdot x + 2}$$

Chapitre 14: Diagonalisation de matrices symétriques

Rappel

$A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique si $A^T = A$

$M \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $M^T \cdot M = I_n$

RR

orthogonale + carrée $\Rightarrow$ inversible

(car $M^T M = I_n \Rightarrow \text{Ker}(M) = \{0\} \Rightarrow M$ inversible)
 M carrée

Lemme 2.1 Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors

$$(A^T \bar{x}) \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot (A \bar{y}), \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$$

En conséquence, A symétrique ssi $(A \bar{x}) \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot (A \bar{y}), \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

(Preuve) $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{u}^T \bar{v} \quad \xrightarrow{(CD)^T = D^T C^T \quad (C^T)^T = C}$

$$(A^T \bar{x}) \cdot \bar{y} \stackrel{\downarrow}{=} (A^T \bar{x})^T \bar{y} \stackrel{\downarrow}{=} \bar{x}^T (A^T)^T \bar{y} \stackrel{\downarrow}{=} \bar{x}^T A \bar{y} \stackrel{\downarrow}{=} \bar{x} \cdot (A \bar{y}) \quad \square$$

Corollaire 7 Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale, alors

$$(M \bar{x}) \cdot (M \bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y}, \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$$

(Preuve)

$$(M \bar{x}) \cdot (M \bar{y}) = (M^T M \bar{x}) \cdot \bar{y} = (I_n \bar{x}) \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot \bar{y}. \quad \square$$

Théorème spectral

(Thm 14.9)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors

Asymétrique $\iff \exists Q \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale
telle que $Q^T A Q$ est diagonale

(on dit que A est orthogonalement diagonalisable)

Si $Q = [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n]$, alors $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ est BON de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A !

Si λ_i est la valeur propre associée à $\bar{v}_i$, alors

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = Q^T A Q \Rightarrow A = Q D Q^T = \lambda_1 \bar{v}_1 \bar{v}_1^T + \dots + \lambda_n \bar{v}_n \bar{v}_n^T$$

(décomposition spectrale de A)

Mais comment la calculer ?

← C'est "presque" la même méthode que pour la diagonalisation usuelle !!!

① Calculer les racines de $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ pour obtenir les valeurs propres.

② Pour chaque valeur propre λ_0 ,

trouver une base de $E_{\lambda_0} = \text{Ker}(A - \lambda_0 I_n)$

$\leadsto B_{\lambda_0}$

③ Appliquer GS à B_{λ_0} pour trouver une BON B_{λ_0}'' de E_{λ_0} et faire la réunion de toutes les B_{λ_0}'' pour trouver la BON $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A .

Exemple / Exercice 14.4

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ symétrique } \checkmark$$

Alors

$$\textcircled{1} P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda) \left[(6-\lambda)(3-\lambda) - 4 \right] + 2 \cdot [(-2)(3-\lambda) - 8] + 4 \cdot [-4 - 4(6-\lambda)]$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 14) + 4\lambda - 28 + 16\lambda - 112$$

$$= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98 = -(\lambda - 7)^2(\lambda + 2).$$

$\Rightarrow$ valeurs propres: 7 (mult. alg 2) et -2 (mult. alg 1)

$$\textcircled{2} \text{ Pour } \lambda = -2: E_{-2} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3/2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_3/2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Pour } \lambda = 7: E_7 = \text{Ker} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 = -\frac{x_2}{2} + x_3 \right\}$$

$$= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\textcircled{3} \text{ On applique GS: Pour } \lambda = -2: B_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \right\} \checkmark. \text{ Pour } \lambda = 7: B_7 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_7 = \left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4/3\sqrt{5} \\ 2/3\sqrt{5} \\ 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\} \checkmark \Rightarrow \text{BON de } \mathbb{R}^3 \left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4/3\sqrt{5} \\ 2/3\sqrt{5} \\ 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}.$$